

Mathematik - Vorkurs

Übungsaufgaben 4. Tag - Lösungen

4.1 Berechnen Sie (auf 2 Dezimalstellen genau)!

a)

$$\ln(x) = 3,40$$

$$x = 29,96$$

b)

$$\ln(x) = -2,573$$

$$x = 0,08$$

c)

$$\ln(x-1) = 0,75$$

$$x = 3,12$$

d)

$$\ln(4x) = 1,387$$

$$x = 1,00$$

e)

$$\ln(1-2x) = -5$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^5} \approx 0,50$$

f)

$$\ln(3x-2) = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{e^{\sqrt{2}}}{3} + \frac{2}{3} \approx 2,04$$

g)

$$3\ln(x^3) = 4$$

$$x = \sqrt[9]{e^4} \approx 1,56$$

h)

$$\sqrt{\ln(1-x)} = 1,2$$

$$x = -3,22$$

i)

$$0,5 e^x = 10$$

$$x = \ln(20) \approx 3,00$$

j)

$$3e^{x-1} = 5$$

$$x = 1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 1,51$$

k)

$$0,2 e^{1-2x} = \sqrt{3}$$

$$x = -0,58$$

l)

$$0,5 e^{\sqrt{x}} = \pi$$

$$x = (\ln(\pi))^2 \approx 1,31$$

4.2 Geben Sie einfacher an!

a) $e^{\ln 3} = 3$ b) $e^{\frac{\ln 1}{2}} = \frac{1}{2}$ c) $e^{2\ln 3} = 9$ d) $e^{\frac{1}{2}\ln 4} = 2$ e) $e^{-\ln \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

f) $e^{-3\ln 2} = \frac{1}{8}$ g) $e^{\frac{1}{3}\ln \frac{1}{8}} = 2$ h) $e^{-\ln 0,5} = 2$ i) $e^{-0,5\ln 0,25} = 2$ j) $e^{-2\ln \sqrt{5}} = 0,2$

k) $\ln(\sqrt[3]{e^2}) = \frac{2}{3}$ l) $\ln(2e^3) = 3 + \ln(2)$ m) $\ln(2\sqrt{e}) = \frac{1}{2} + \ln(2)$

$$\text{n) } \ln(a e^b) = b + \ln(a) \quad \text{o) } \ln(\sqrt{e^k}) = \frac{k}{2} \quad \text{p) } \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{q) } \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{e}\right) = \frac{1}{3} - \ln(2) \quad \text{r) } \ln\left(\frac{2}{3}\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2} + \ln(2) - \ln(3)$$

$$\text{s) } \ln\left(\frac{3\sqrt{e}}{4}\right) = \frac{1}{2} + \ln(3) - 2\ln(2) \quad \text{t) } \ln\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{e}}\right) = -\frac{1}{4} - \ln(2)$$

Gleichungen umstellen und lösen!

4.3.1 Gleichungen mit Exponential- und Logarithmusfunktionen

a)

$$e^{3x} = 2$$

$$x = \frac{1}{3}\ln(2) \approx 0,231$$

b)

$$e^{-\frac{1}{2}x} - 3 = 0$$

$$x = -2\ln(3) \approx -2,197$$

c)

$$e^{2x-1} = 4$$

$$x = \frac{1}{2} + \ln(2) \approx 1,193$$

d)

$$3e^{-0,4x+1} = 2$$

$$x = \frac{5}{2}\left(1 - \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) \approx 3,51$$

e)

$$\ln(2x) = 1$$

$$x = \frac{e}{2} \approx 1,359$$

f)

$$\ln\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21$$

g)

$$-\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} \approx \pm 0,93$$

h)

$$2\ln(x) = \ln(2x)$$

$$x = 2$$

i)

$$e^x(1-e^x) = 0$$

$$x = 0$$

j)

$$2e^{2x} - e^x = 0$$

$$x = -\ln(2)$$

k)

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

$$x_1 = \ln(3)$$

$$x_2 = \ln(2)$$

l)

$$e^x + 1 = 12e^{-x}$$

$$x_1 = \ln(3)$$

$$(x_2 = \ln(-4) \text{ entfällt})$$

m)

$$2x^x - 3e^{-x} + 5 = 0$$

$$x_1 = -\ln(2)$$

($x_2 = \ln(-3)$) entfällt)

n)

$$e^{2x} 36 + e^{-2x} = 13$$

$$x_1 = \ln(3)$$

$$x_2 = \ln(2)$$

o)*

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{2x+3} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-5}$$

$$x = \frac{2}{5}$$

p)*

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x+1}$$

$$x = -1,482$$

q)*

$$2^{(3^x)} = 2^{(4^x)}$$

$$x = -1,601$$

r)*

$$2^x - 3^{x+1} = 2^{x+2} - 3^{x+3}$$

$$x = -5,129$$

s)**

$$15^x + 9^x = 25^x$$

$$x = 0,942 \text{ z.B. mittels Fixpunktiteration}$$

4.3.2 Quadratische Gleichung

Bringen Sie die quadratische Gleichung $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$

mithilfe der quadratischen Ergänzung auf die Gestalt $\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1$!

$$9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$$

$$9(x^2 + 10x + 25 - 25) - 16(y^2 - 2y + 1 - 1) - 367 = 0$$

$$9(x+5)^2 - 225 - 16(y-1)^2 + 16 - 367 = 0$$

$$9(x+5)^2 - 16(y-1)^2 = 576$$

$$\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 4$$

$$\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1$$

Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

4.3.3 Goniometrische Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion

$k \in \mathbb{Z}$

a)

b)

$$4 \cos^2(x) + 4 \cos(x) - 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

c)

$$7 \cot(x) = \frac{4}{\cot(x)} + 12$$

$$x_1 = 26,57^\circ + k180^\circ$$

$$x_2 = 105,95^\circ + k180^\circ$$

$$\sin(x) - \sqrt{3} \sin^2(x) + \frac{1}{4}\sqrt{3} = 0$$

$$x_1 = 60^\circ + k360^\circ$$

$$x_2 = 120^\circ + k360^\circ$$

$$x_3 = 196,58^\circ + k360^\circ$$

$$x_4 = 343,42^\circ + k360^\circ$$

d)

$$\sqrt{2} \cos(x) - 2 \cos^2(x) + 6 = 0$$

keine Lösung, außerhalb des

Wertebereiches von $\cos(x)$

4.3.4 mit mehreren Winkelfunktionen gleichen Arguments

$k \in \mathbb{Z}$

a)

$$\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(x)$$

$$x = 30^\circ + k180^\circ$$

b)

$$3 \sin(x) + 5 \cos(x) = 0$$

$$x = 120,96^\circ + k180^\circ$$

c)

$$2 \cos^2(x) + 3 \sin(x) = 3$$

$$x_1 = 90^\circ + k360^\circ$$

$$x_2 = 30^\circ + k360^\circ$$

$$x_3 = 150^\circ + k360^\circ$$

d)

$$\tan(x) + 8 \cot(x) = 6$$

$$x_1 = 63,43^\circ + k180^\circ$$

$$x_2 = 75,94^\circ + k180^\circ$$

e)

$$\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = 15^\circ + k180^\circ$$

$$x_2 = 75^\circ + k180^\circ$$

4.3.5 mit mehreren Winkelfunktionen unterschiedlichen Arguments

$k \in \mathbb{Z}$

a)

$$\sin(2x) = \tan(x)$$

$$x = 45^\circ + k90^\circ$$

b)

$$\cos(2x) + 2 \cos(x) + 1 = 0$$

$$x_1 = 90^\circ + k180^\circ$$

$$x_2 = 180^\circ + k360^\circ$$

c)

$$\cos(2x) - \cos(x) = -2$$

keine reelle Lösung