Mathematik - Vorkurs
Übungsaufgaben 3. Tag - Lösungen

Gleichungen mit Exponential- und Logarithmus-Funktionen

3.1.1 Lösen Sie folgende Gleichungen für die Variable x

a)

$$5{,}78^{2x} = 327{,}89$$
$$x \approx 1{,}65$$

b)

$$0{,}7^{x-1} \cdot 3{,}1^{2x+1} = 12$$
$$\frac{\ln 12 + \ln 0{,}7 - \ln 3{,}1}{\ln 0{,}7 + 2\ln 3{,}1} \approx 0{,}523$$

c)

$$\lg\sqrt{2x-1} + 0{,}5 \cdot \lg(x-9) = 1$$
$$x = 13$$
$$x = -\frac{7}{2} \text{ entfällt}$$

3.1.2 Stellen Sie folgende Gleichung nach y um:

$$x = \ln(y+4) - \ln(y-4)$$
$$y = 4 \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

Aufgaben zu Winkeln und Winkelfunktionen

3.2.1 Bei der Produktion von Installationskabel läuft das Kabel über eine Rolle von Radius R = 25,5 cm mit konstanter Geschwindigkeit. Pro Sekunde dreht sich die Rolle um einen Winkel von 263,5°.

a) Über welchen Winkelbereich hat sich die Rolle in einer Stunde weitergedreht?

$$\delta = 948600° \text{ in einer Stunde}$$

b) Wieviel Umdrehungen hat die Rolle dabei gemacht ?

$$n = 2635 \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{Stunde}}$$

c) Wieviel Meter Kabel wurden in dieser Stunde erfasst ?

$$u = 4216{,}0\,\text{m Kabel in einer Stunde}$$

d) Um wieviel Grad ist die Position der Rolle nach einer Stunde gegenüber der Ausgangsstellung verdreht ?

$$\frac{948600°}{360° \cdot 1\text{h}} = 2635\,\text{Umdr./h} \text{ , d.h. } \upsilon = 0° \text{ Verdrehung}$$

e) Welche maximalen Fehler ergeben sich für die in a) ... d) berechneten Werte, wenn der Drehwinkel pro Sekunde höchstens um 0,1° abweicht ?

$$\text{a)} \left.\begin{array}{ll} -1°/\text{s} & 948240° \\ +1°/\text{s} & 948960° \end{array}\right\} \Delta\delta = 720°$$

$$\text{b)} \left.\begin{array}{ll} -1°/\text{s} & 2634\,\text{Umdr./h} \\ +1°/\text{s} & 2636\,\text{Umdr./h} \end{array}\right\} \Delta n = 2\,\text{Umdr./h}$$

$$\text{c)} \left.\begin{array}{ll} -1°/\text{s} & 4214{,}4\,\text{m} \\ +1°/\text{s} & 4217{,}6\,\text{m} \end{array}\right\} \Delta u = 3{,}2\,\text{m}$$

$$\text{d)} \left.\begin{array}{ll} -1°/\text{s} & 114° \\ +1°/\text{s} & 116° \end{array}\right\} \Delta\upsilon = 2°$$

3.2.2 Folgende Werte sollten ohne Taschenrechner bestimmt werden können:

a) $\sin(120°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\cos(-120°) = -\frac{1}{2}$ c) $\tan(-45°) = -1$ d) $\sin(0°) = 0$

e) $\cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ f) $\cos(270°) = 0$ g) $\cot(90°) = 0$ h) $\sin(135°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

i) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ j) $\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ k) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ l) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

m) $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ n) $\cos(\pi) = -1$ o) $\cos(0) = 1$ p) $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \text{n.d.}$

q) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ r) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ s) $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ t) $\cos(24\pi) = 1$

3.2.3 Lösen Sie folgende goniometrische Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$:

a)

$$\sin x = 0,3$$
$$x_1 \approx 0,3047$$
$$x_2 \approx 2,8369$$

b)

$$\sin(2x) = 0,3$$
$$x_1 \approx 0,1527$$
$$x_2 \approx 1,4184$$

c)

$$\sin(2x) = -0,3$$
$$x_1 \approx 1,7232$$
$$x_2 \approx 2,9892$$

d)

$$3\cos(0,2x) - 4 = 0$$
$$\cos(0,2x) = \frac{4}{3} > 1, \text{d.h. nicht lösbar}$$

e)

$$\tan x = 3$$
$$x_1 \approx 1,2490$$
$$x_2 \approx 4,3906$$

f)

$$\cot(2x) = -2$$
$$x_1 \approx 1,3390$$
$$x_2 \approx 2,9098$$

3.2.4 Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichungen:

a)

$$\sin x + \cos(2x) = 0$$
$$D = \mathbb{R}$$
$$L = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b)

$$1,5\sin x - 2,2\cos x + 1,2 = 0$$
$$D = \mathbb{R}$$
$$L = \{ x \in \mathbb{R} \mid x_1 \approx 0,50486 + 2k\pi;\ x_2 \approx 4,58148 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

c)

$$3 \cdot \sin 2x - 2 \cdot \tan x = 0$$
$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$L = \{ x \in \mathbb{R} \mid x_1 \approx 0,9553 + 2k\pi;\ x_2 \approx 5,3279 + 2k\pi;\ x_3 \approx 2,1863 + 2k\pi;$$
$$x_4 \approx 4,0969 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

d)

$$\sin x + \cos x = 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

e)

$$2\sin x + \tan x = 0$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x_1 \approx 2,3562 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

f)

$$\tan^2 2x = 1$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x_1 \approx 0,3927 + k\frac{\pi}{2};\ x_2 \approx 1,1781 + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3.2.5 Von einem Federschwinger (harmonische Schwingung) sind Frequenz und Amplitude bekannt: f = 0,9 Hz und A = 7,4 cm.

Die Schwingung beginne zur Zeit t = 0 und wird durch eine reine Sinusfunktion beschrieben: $y(t) = A\sin(2\pi f \cdot t)$

a) Nach welcher Zeit findet die erste maximale Auslenkung statt ?

$$t_0 = \frac{5}{18}\,s = 0,2\overline{7}\,s$$

b) Wann erfolgt der erste Nulldurchgang ?

$$t_1 = \frac{5}{9}\,s = 0,\overline{5}\,s$$

c) Wann hat der Schwinger zum ersten Mal 10%, 50% bzw 90% der maximalen Auslenkung erreicht ?

$$10\%:\quad t \approx 0,0177\,s$$
$$50\%:\quad t \approx 0,0926\,s$$
$$90\%:\quad t \approx 0,1980\,s$$