Mathematik - Vorkurs
Übungsaufgaben 2. Tag - Lösungen

Potenz- und Wurzelgesetze

2.1 Vereinfachen bzw. berechnen Sie folgende Ausdrücke (ohne Taschenrechner)

a) $49^{\frac{1}{2}} = 7$ b) $27^{\frac{1}{3}} = 3$ c) $8^{\frac{2}{3}} = 4$ d) $1024^{\frac{3}{10}} = 8$

e) $\frac{\left(14^2\right)^5 \cdot \left(8^3\right)^2}{7^9 \cdot 2^{29}} = \frac{7}{2}$ f) $\frac{15 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^{13} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 15$ g) $\frac{\left(6^3\right)^3 \left(8^4\right)^2}{12^{12}} = \frac{2^9}{3^3} = \frac{512}{27}$

h) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$ i) $\sqrt{a^2} \cdot a^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a},\ (a \neq 0)$ j) $\frac{165r^2s^3t^7}{187r^3s^5t^9} = \frac{15}{17\,r\,s^2t^2}$

k) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{9}{4}$ l) $\left(\frac{16}{9a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}|a|$ m) $\sqrt{5}\sqrt{9x^2}\,\sqrt{8}\sqrt{16y^2}\,\sqrt{10} = 240\,|x| \cdot |y|$

Gleichungen und Ungleichungen

2.2 Geben Sie die Definitions- und Lösungsmengen im Reellen an

a)

$$\frac{3}{x-2} + 1 = \frac{-6}{2(2-x)}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ oder $x \neq 2$

$L = \varnothing$

b)

$$\frac{1}{1-x} = 2$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $L = \left\{x = \frac{1}{2}\right\}$

c)

$$\frac{u^2 - 1}{(u+1)(u+5)} = 1$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -1\}$

$L = \varnothing$ Widerspruch $-1 = 5$

d)

$$\sqrt{2x} = x + 1$$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$L = \varnothing$ Widerspruch $x^2 = -1$

e)

$$\frac{1}{1-x} = 0$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$L = \varnothing$ Widerspruch $1 = 0$

f)

$$\frac{1}{x-1} \leq 2$$

nach Fallunterscheidung :

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (x < 1) \cup \left(x \geq \frac{3}{2}\right)\right\}$

g)

$$\frac{4}{3x-2} > 5$$

nach Fallunterscheidung :

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} \quad L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x < \frac{14}{15}\right\}$$

Quadratische Binome

2.3.1 Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie soweit wie möglich

a) $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$

b) $(3s-2)(3s+2) = 9s^2 - 4$

c) $(5c-u)^2 = 25c^2 - 10cu + u^2$

d) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

e) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2\left(x^2 + y^2\right)$

2.3.2 Finden Sie die Binome:

a) $x^2 - 49 = (x+7)(x-7)$

b) $2t^2 - 162 = 2\left(t^2 - 81\right) = 2(t+9)(t-9)$

c) $a^2 + 2\sqrt{3}a + 3 = \left(a + \sqrt{3}\right)^2$

d) $400 - s^2 = (20+s)(20-s)$

e) $64y^2 - 80y + 25 = (8y-5)^2$

f) $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

g) $x^4 + 8x^2 + 16 = \left(x^2 + 4\right)^2$

2.3.3 Finden Sie von der Parabel $y = 2x^2 - 8x$ die Lage des Scheitelpunktes mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

$$\begin{aligned} y &= 2\left(x^2 - ax + 4 - 4\right) \\ &= 2(x-2)^2 - 8 \quad S(2;-8) \end{aligned}$$

2.3.4 Beseitigen Sie die Wurzeln in den Nennern der Brüche durch Anwendung der binomischen Formeln

a) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{9+2\sqrt{14}}{5}$ b) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ c) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$

Quadratische Gleichungen

2.4 Geben Sie Definitions- und Lösungsmengen im Reellen an

a)

$$(x+5)^2=25$$
$$D=\mathbb{R}$$
$$L=\{x_1=-2;\ x_2=-10\}$$

b)

$$6x^2-13x=-6$$
$$D=\mathbb{R}$$
$$L=\left\{x_1=\frac{3}{2};\ x_2=\frac{2}{3}\right\}$$

c)

$$2x^4+10x^2-72=0$$
$$\text{Substitution}: x^2=z\ \ (z=-9\text{ entfällt})$$
$$D=\mathbb{R}$$
$$L=\{x_1=-2;\ x_2=2\}$$

d)

$$2x+4\sqrt{x}=30$$
$$D=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$$
$$L=\{x=9\}$$
$$\text{Scheinlösung}: x=25\text{ entfällt}$$

e)

$$x=\sqrt{6-x}$$
$$D=\{x\in\mathbb{R}\mid x<6\}$$
$$L=\{x=2\}$$
$$\text{Scheinlösung}: x=-3\text{ entfällt}$$

f)

$$\sqrt{10+8x-2x^2}=2\sqrt{2}$$
$$D=\{x\in\mathbb{R}\mid 10+8x-2x^2\geq 0\}$$
$$D=\{x\in\mathbb{R}\mid (x-5)(x+1)\leq 0\}$$
$$\text{nach Fallunterscheidung}: -1\leq x\leq 5$$
$$L=\{x_1=2+\sqrt{5},x_2=2-\sqrt{5}\}$$

g)

$$(x^2-4x+4)(3x^2-9x)=0$$
$$D=\mathbb{R}$$
$$L=\{x_{1/2}=2(\text{doppelt});\ x_3=0;\ x_4=3\}$$

Verwendung des Summationszeichens

2.5.1 Schreiben Sie folgende Summen mit allen Summanden:

a) $\sum_{n=1}^{5} \frac{n}{n+2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \frac{5}{7}$

b) $\sum_{k=0}^{4} \frac{2^k}{3^k} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{3}{27} + \frac{16}{81}$

c) $\sum_{i=5}^{10} \left(-1\right)^i \frac{i-1}{i^2} = -\frac{4}{25} + \frac{5}{36} - \frac{6}{49} + \frac{7}{64} - \frac{8}{81} + \frac{9}{100}$

2.5.2 Folgende Summen sind mit Hilfe des Summationszeichens zu schreiben, wobei der Laufindex n bei 1 beginnen soll:

a) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} = \sum_{n=1}^{4} \frac{n+2}{n+1}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{4}{7} + \frac{9}{10} + \frac{16}{13} + \frac{25}{16} = \sum_{n=1}^{5} \frac{n^2}{3n+1}$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{16} + \left(-\frac{1}{32}\right) + \frac{1}{64} = \sum_{n=1}^{6} (-1)^n \frac{1}{2^n}$

d) $7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 23 = \sum_{n=1}^{7} \left(2n+5\right) + 23$

e) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{8} + \frac{x^8}{16} + \frac{x^{10}}{32} = \sum_{k=1}^{6} \frac{x^{2k-2}}{2^{k-1}}$