1. Differentialgleichungen

1.2 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Trennen der Variablen!

Aufgabe 1.2.1 $y' = \frac{2+\sin(x)}{3+4y}$

Lösung

$$y' = \frac{2+\sin(x)}{3+4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+\sin(x)}{3+4y}$$

$$(3+4y)dy = (2+\sin(x))dx \qquad \Big| \int(\ldots)$$

$$\int(3+4y)dy = \int(2+\sin(x))dx$$

$$3y+2y^2 = 2x-\cos(x)+K$$

$$0 = 2y^2+3y-2x+\cos(x)-K$$

$$0 = y^2+\frac{3}{2}y-x+\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}K$$

$$y_{1/2} = -\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+x-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}K}$$

$$\text{mit } \tilde{K} = \frac{9}{16}+\frac{1}{2}K$$

$$y_{1/2} = -\frac{3}{4}\pm\sqrt{\tilde{K}+x-\frac{1}{2}\cos(x)}$$

Das Vorzeichen + oder – ergibt sich erst beim Einsetzen von Anfangsbedingungen eindeutig.

Aufgabe 1.2.2 $\dot{x} = \frac{e^{-3t}}{x+2}$; $x(0) = 2$

Lösung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^{-3t}}{x+2}$$

$$(x+2)dx = e^{-3t}dt \qquad \Big| \int(\ldots)$$

$$\int (x+2)dx = \int e^{-3t}dt$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{3}e^{-3t} + K$$

$$0 = x^2 + 4x + \frac{2}{3}e^{-3t} - 2K$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{2}{3}e^{-3t} + 2K}$$

$$\text{mit } \hat{K} = 2K + 4$$

$$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{\hat{K} - \frac{2}{3}e^{-3t}}$$

Da $x(0) = 2 > -2$, muss für die spezielle Lösung das „+“ vor der Wurzel stehen:

$$x(0) = -2 + \sqrt{\hat{K} - \frac{2}{3}e^{-3t}} = 2$$

$$\sqrt{\hat{K} - \frac{2}{3}e^{-3t}} = 4$$

$$\hat{K} - \frac{2}{3}e^{-3t} = 16$$

$$\hat{K} = 16 + \frac{2}{3} = \frac{50}{3}$$

$$x = x(t) = -2 + \sqrt{\frac{50}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t}} \quad \text{(spezielle Lösung)}$$

Aufgabe 1.2.3 $\frac{du}{dt} = 3u\cos(3t+4)$

Lösung

$$\frac{du}{u} = 3\cos(3t+4)dt \qquad \left|\int(\ldots)\right.$$

$$\int\frac{du}{u} = \int 3\cos(3t+4)dt$$

$$\ln|u| = \sin(3t+4) + K \qquad \left|e^{(\ldots)}\right.$$

$$|u| = e^{(\sin(3t+4)+K)} = e^{\sin(3t+4)}e^{K}$$

$$u = \pm e^{K}\cdot e^{\sin(3t+4)}$$

$$e^{K} > 0; \quad \tilde{K} = \pm e^{K}; \quad \tilde{K} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$u = \tilde{K}\,e^{\sin(3t+4)} \qquad (\text{allg. Lösung})$$

Aufgabe 1.2.4 $\frac{di(t)}{dt} = (3t+1)i$

Lösung

$$\frac{di(t)}{i} = (3t+1)dt \qquad \left|\int(\ldots)\right.$$

$$\int\frac{di(t)}{i} = \int(3t+1)dt$$

$$\ln|i| = \frac{3}{2}t^2 + t + K \qquad \left|e^{(\ldots)}\right.$$

$$|i| = e^{\left(\frac{3}{2}t^2+t+K\right)} = e^{\left(\frac{3}{2}t^2+t\right)}e^{K}; \qquad \tilde{K} = \pm e^{K}; \qquad \tilde{K} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$i = \pm e^{K}e^{\left(\frac{3}{2}t^2+t\right)}$$

$$\tilde{K} = \pm e^{K}; \qquad \tilde{K} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$i = i(t) = \tilde{K}e^{\left(\frac{3}{2}t^2+t\right)} \qquad (\text{allg. Lösung})$$

Aufgabe 1.2.5 $y' = -3y + 1$

Lösung

$$\frac{dy}{dx} = -3y + 1$$

$$\frac{dy}{-3y+1} = dx \qquad \left| \int (\ldots) \right.$$

$$\int \frac{dy}{-3y+1} = \int dx$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|-3y+1\right| = x + K$$

$$\ln\left|-3y+1\right| = -3x - 3K \qquad \left| e^{(\ldots)} \right.$$

$$\left|-3y+1\right| = e^{-3x-3K} = e^{-3x} \cdot e^{-3K}$$

$$\text{mit } e^{-3K} = K^*; \quad K^* \in \mathbb{R}; \quad K^* > 0$$

$$\left|-3y+1\right| = K^* e^{-3x}$$

$$-3y + 1 = \pm K^* e^{-3x}$$

$$-3y = -1 \pm K^* e^{-3x}$$

$$y = \frac{1}{3} \mp \frac{1}{3} K^* e^{-3x}$$

$$\text{mit } \hat{K} = \mp\frac{1}{3}K^*; \quad \hat{K} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y = \frac{1}{3} + \hat{K}e^{-3x} \qquad (\text{allg. Lösung})$$

Aufgabe 1.2.6 $y' = -3x + 1$

Lösung

$$\frac{dy}{dx} = -3x + 1$$

$$dy = (-3x + 1)dx \qquad \left| \int (\ldots) \right.$$

$$\int dy = \int (-3x + 1)dx$$

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + x + K \qquad (\text{allg. Lösung})$$