# Grundlagen Vollständiges Differential/ Fehlerrechnung

Gegeben sei eine Funktion $z = f(x, y)$ der unabhängigen Variablen x und y, die an dem Punkt $P_0(x_0, y_0)$ den Funktionswert $z_0$ habe. Wenn sich nun von $P_0$ ausgehend die Variablen x und y um dx und dy verändern, erfährt auch z eine infinitesimale Änderung dz, die man mit dem vollständigen (auch: totales) Differential ausdrückt:

$$dz = z_x(x_0, y_0)dx + z_y(x_0, y_0)dy$$

Diese Beziehung gilt für nicht unendlich kleine Änderungen nur näherungsweise:

$$\Delta z \approx z_x(x_0, y_0)\Delta x + z_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Für mehr als zwei unabhängige Variablen, z.B. $x_1, \ldots, x_n$, gelten diese Formeln entsprechend, also $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Dabei sind die partiellen Ableitungen am Ausgangspunkt zu berechnen. Die Differenzen $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n, \Delta z$ sind tatsächliche Veränderungen, können also sowohl positiv (bei Vergrößerung) als auch negativ (bei Verkleinerung) sein.

In der <u>Fehlerrechnung</u> bezeichnen $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ absolute Maximalfehler von Messgrößen und sind vereinbarungsgemäß stets positiv! Im Intervall $x_1 \pm \Delta x_1$ liegt dann der wahre Wert der Größe mit 100%-iger Sicherheit. Den Maximalfehler $\Delta z$ der berechneten Größe z erhält man für den ungünstigsten Fall, in dem sich alle Summanden des vollständigen Differentials aufsummieren. Das lässt sich formelmäßig durch Betragsbildung der partiellen Ableitungen erreichen:

$$\Delta z \approx \left|\frac{\partial z}{\partial x_1}\right|\Delta x_1 + \left|\frac{\partial z}{\partial x_2}\right|\Delta x_2 + \ldots + \left|\frac{\partial z}{\partial x_n}\right|\Delta x_n$$

In bestimmten, durchaus häufig vorkommenden, Fällen lässt sich diese Fehlerfortpflanzung durch eine vereinfachte Formel ausdrücken. Voraussetzung ist, dass sich z nur aus dem Produkt von Potenzen der Messgrößen $x_1, \ldots, x_n$ (und ggf. einen konstanten Faktor C) berechnet, also z.B. bei 3 Messgrößen:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = C \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} \cdot x_3^{\gamma}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = |\alpha| \frac{\Delta x_1}{x_1} + |\beta| \frac{\Delta x_2}{x_2} + |\gamma| \frac{\Delta x_3}{x_3}$$

Aus dem relativen Maximalfehler $\frac{\Delta z}{z}$ lässt sich im Anschluss auch der absolute Maximalfehler berechnen: $\Delta z = \frac{\Delta z}{z} \cdot z$