Lösungen Prüfungsvorbereitung / Tutorien Mathe 1

1. Schwerpunkt: Matrizenrechnung

1.1 Untersuchen Sie, für welche Werte p die Matrix C=A*B eine Inverse Matrix besitzt!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$C = A \cdot B$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 4+2p \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 4+2p \end{vmatrix} = 8 + 4p - 22 = 4p - 14 \qquad D \neq 0 \rightarrow 4p - 14 \neq 0$$

$$4p \neq 14$$

$$\underline{\underline{p \neq \frac{7}{2}}}$$

1.2 Man gebe das Gleichungssystem

$$x + y = a \quad (I)$$

$$x - y = b \quad (II)$$

In Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix A an!

Man löse es mit dem Gauß-Algorithmus nach x und y auf und gebe das Ergebnis ebenfalls in Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix B an!

Zeigen Sie, dass A und B zueinander inverse Matrizen sind!

Für welche Wahl der Konstanten a, b ist das gegebene Gleichungssystem eindeutig lösbar, unlösbar bzw. besitzt unendlich viel Lösungen?

Lösung:

- Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- nach den Variablen x und y auflösen:

(I)+(II): $2x = a + b$
(I)-(II): $2y = a - b$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

$$y = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

- Matrizenschreibweise mit einer Koeffizientenmatrix B:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Zeigen, dass A und B zueinander inverse Matrizen sind:

$$B = A^{-1}$$

$$A \cdot B = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich die Einheitsmatrix, somit sind A und B zueinander inverse Matrizen.

- Stets eindeutig lösbar für beliebige a, b $\in \mathbb{R}$

1.3 Gegeben sind die Matrizen A, B, C mit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ p & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Matrizen A, B, B^T und C !

b) Berechnen Sie die Produkte AB und $B^T A^T$!

c) Welche Matrix X erfüllt die Gleichung 2A + X = 4C ?

Lösung

a) Typ $A = (3;3)$ Typ $B = (3;2)$ Typ $B^T = (2;3)$ Typ $C = (3;3)$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p+1 & -3 \\ p^2+7 & 4 \\ p & -5 \end{pmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 2p+1 & p^2+7 & p \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

c)

$$2A + X = 4C$$

$$X = 4C - 2A$$

$$X = 4\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ p & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ p & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 16 & -4 & -8 \\ 4p & 12 & 20 \\ -12 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2p & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -6 \\ 2p & 8 & 14 \\ -14 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

1.4. Stellen Sie die nachfolgende Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

nach dem Lösungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ um und bestimmen Sie die Werte von a und b mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix.

Lösung

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C \quad \left| A^{-1} \cdot \right.$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot B) &= A^{-1} \cdot C \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ I \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ B &= A^{-1} \cdot C \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (M|I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 5 \end{array} \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -10 & 2 & 0 \\ 15 & -10 & 0 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} -Z2 \\ \end{array} \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 2 & -5 \\ 15 & -10 & 0 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ :5 \end{array} \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +\frac{3}{11} Z1 \end{array} \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & \frac{6}{11} & -\frac{4}{11} \end{array} \right) \begin{array}{l} :(-11) \\ :(-2) \end{array} \end{aligned}$$

$$(I|M^{-1}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

1.5 Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -7 \\ 4x - y &= 25 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie dieses Gleichungssystem in Matrizenform.

b) Stellen Sie die Matrixgleichung nach dem Spaltenvektor der gesuchten Variablen um, und bestimmen Sie die Werte von x und y mit Hilfe der inversen Matrix.

(Die inverse Matrix kann mit dem Gauss-Jordan-Verfahren oder auch über Adjunkten erfolgen – in jedem Fall ist ihre Berechnung ausführlich durchzuführen !)

Lösung – mit dem Gauss-Jordan-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = C \quad \big| A^{-1} \cdot$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot B) &= A^{-1} \cdot C \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ I \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ B &= A^{-1} \cdot C \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$(M|I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) +3Z2$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) -\frac{2}{7}Z1$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc} 14 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2/7 & 1/7 \end{array}\right) \begin{array}{l} :14 \\ :(-1) \end{array}$$

$$(I|M^{-1})=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/14 & 3/14 \\ 0 & 1 & 2/7 & -1/7 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/14 & 3/14 \\ 2/7 & -1/7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 34/7 \\ -39/7 \end{pmatrix}}}$$

1.6 Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit der inversen Matrix

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & & & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 4z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Die inverse Matrix ist ausführlich mit dem Gauss-Jordan-Verfahren zu berechnen !

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \quad \cdot B = C \quad \left| A^{-1} \cdot \right.$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot B) &= A^{-1} \cdot C \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ I \cdot B &= A^{-1} \cdot C \\ B &= A^{-1} \cdot C \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -Z3 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -Z1 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3Z3 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2Z2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +Z2 \end{array}$$

$$\left(I \middle| M^{-1}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -8 \\ -3 & -1 & 4 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

2. Lineare Gleichungssysteme (ohne Matrizen)

2.1 Lösen Sie mit dem Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 4 & \quad (I) \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 9 & \quad (II) \\ x & - & y & + & 2z & = & -3 & \quad (III) \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +z & = & 4 & (I) \\ 2x & +3y & +4z & = & 9 & (II) \\ x & -y & +2z & = & -3 & (III) \end{array}$$

$-1*(III)+(I)$: $\quad 2y - z = 7 \quad (IV)$

$-2*(III)*+(II)$: $\quad 5y = 15$

$\rightarrow \quad \underline{y = 3}$

aus (IV): $\quad 6 - z = 7 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{z = -1}}$

aus (I): $\quad x + 3 - 1 = 4 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}}$

2.2 Man löse:

a)
$$\begin{aligned} 4x - 5y - 7z &= 0 \quad (I)\\ x + 2y + 2z &= 0 \quad (II)\\ 7x + y - z &= 0 \quad (III)\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x - y + 5z &= 1 \quad (I)\\ x + 3y - z &= 7 \quad (II)\\ 15x + y + 9z &= 2 \quad (III)\end{aligned}$$

Lösung:

b)

$$\begin{array}{rl} & 7x - y + 5z = 1 \quad (I)\\ & x + 3y - z = 7 \quad (II)\\ & \underline{15x + y + 9z = 2 \quad (III)}\\ 3*(I)+(II): & 22x + 14z = 10 \quad (IV)\\ (I)+(III): & \underline{22x + 14z = 3 \quad (V)}\\ -1*(IV)+(V): & 0 = 7 \quad \text{Widerspruch}\end{array}$$

$$L = \{\varnothing\}$$

a)

$$\begin{array}{rl} & 4x - 5y - 7z = 0 \quad (I)\\ & x + 2y + 2z = 0 \quad (II)\\ & \underline{7x + y - z = 0 \quad (III)}\\ -4*(II)+(I): & -13y - 15z = 0 \quad (IV)\\ -7*(II)+(III): & \underline{-13y - 15z = 0} \quad (V)\\ -1*(IV)+(V): & 0 = 0\end{array}$$

frei wählbare Variable: z.B. $z \in \mathbb{R}$

aus (IV): $-13y = 15z$

$$\underline{\underline{y = -\frac{15}{13}z}}$$

aus (II): $x + 2\left(-\frac{15}{13}z\right) + 2z = 0$

$$\underline{\underline{x = \frac{4}{13}z}}$$

$$L = \left\{(x;y;z) = \left(\frac{4}{13}z; -\frac{15}{13}z; z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$$

2.3 Lösen sie mit dem Gauß'schen Verfahren:

$$
\begin{array}{rrrrcrl}
2x & & & -u & = & 0 & \text{(I)} \\
x & +y & +2z & +u & = & 6 & \text{(II)} \\
2x & +2y & +4z & & = & 8 & \text{(III)} \\
x & -y & -2z & -2u & = & -6 & \text{(IV)}
\end{array}
$$

Lösung:

$$
\begin{array}{rl}
\text{(I)+(II):} & 3x + y + 2z = 6 \quad \text{(V)} \\
2*\text{(II)+(IV):} & 3x + y + 2z = 6 \quad \text{(VI)} \\
\text{(III):} & \underline{2x + 2y + 4z = 8} \quad \text{(III)} \\
\text{(V)-(VI):} & 0 = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
-2*\text{(V)+(III):} & -4x = -4 \\
 & \underline{\underline{x = 1}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{aus (I):} & 2x - u = 0 \\
 & 2x = u \\
 & \underline{\underline{u = 2}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{aus (II):} & x + y + 2z + u = 6 \\
 & 3 + y + 2z = 6 \\
 & \underline{\underline{y = 3 - 2z}}
\end{array}
$$

$$L = \left\{(x,\ y,\ z,\ u)\ \middle|\ x = 1;\ y = 3 - 2z;\ z \in \mathbb{R};\ u = 2\right\}$$

2.4 Aufgabe mit Lösung:

Untersuchen Sie folgende Aussagen über Gleichungssysteme (GS). Kreuzen Sie die jeweils richtigen Aussagen an. (Es können auch mehrere gleichzeitig richtig sein)

a) Gegeben ist ein lineares GS mit 3 Gleichungen für 5 Variable.

- ○ Dieses GS ist auf jeden Fall unlösbar.
- ○ Dieses GS hat genau eine Lösung.
- ⊗ Dieses GS ist entweder unlösbar oder hat unendlich viele Lösungen.

b) Gegeben ist ein lineares homogenes GS. Von diesem lässt sich die Koeffizientendeterminante D berechnen. Sie hat den Wert D=0.

- ⊗ Das GS hat genauso viele Gleichungen wie Variable.
- ○ Das GS kann unlösbar sein.
- ○ Das GS kann nur die triviale Lösung besitzen.
- ⊗ Das GS besitzt auf jeden Fall unendlich viele Lösungen.

c) Gegeben ist ein lineares GS. Von diesem lässt sich die Koeffizienten-determinante D berechnen. Sie hat den Wert D=-5.

- ○ Das GS kann nicht mit dem Gauß'schen Verfahren gelöst werden.
- ○ Das GS ist unlösbar.
- ⊗ Das GS lässt sich mit der Cramerschen Regel lösen.
- ⊗ Das GS lässt sich mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix lösen.