# Lösungen Übungsaufgaben Folgen und Reihen

1. $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n} \qquad \Rightarrow a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = \frac{0}{15} = 0$

2. explizit: $(a_n) = 5n + 3 \qquad \Rightarrow (a_{n+1}) = 5(n+1) + 3 = (5n+3) + 5 = (a_n) + 5$
   rekursiv: $(a_1) = 8; (a_{n+1}) = (a_n) + 5$

3. Welche Glieder der arithmetischen Folge mit $a_n = 25 + (n-1)\cdot(-3)$ sind < -150 ?

   $a_n = 25 + (n-1)\cdot(-3) = 28 - 3n \qquad$ monoton fallend

   $28 - 3n = -150 \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{178}{3} = 59,\overline{3} \qquad \Rightarrow n \geq 60$

4. Welche Glieder der geometrischen Folge mit $a_n = 4 \cdot 1,3^{n-1}$ sind größer als 1000 ?

   $4 \cdot 1,3^{n-1} = 1000 \qquad \Rightarrow n = 1 + \frac{\ln(250)}{\ln(1,3)} = 22,04 \quad \Rightarrow n \geq 23 \qquad$ da monoton steigend

5. Ist die Folge konvergent oder divergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

   a) $(a_n) = \left(\frac{3n + 1000}{-4n}\right) \qquad$ konvergent mit $g = -\frac{3}{4}$

   b) $(a_n) = \left(\frac{-n^3}{100n^2}\right) \qquad$ divergent mit $g = -\infty$

   c) $(a_n) = \left(\frac{n^2 + 100000n}{20n^3 + 1}\right) \qquad$ konvergent mit $g = 0$

6. Bestimmen Sie den Grenzwert g der Folge $(a_n) = \left(\frac{4n-1}{-5n+2}\right)$. Welche Glieder der Folge liegen innerhalb bzw. außerhalb der $\varepsilon$- Umgebung von g für $\varepsilon = 10^{-2}$?

   Lösung: g = -0,8; für n >= 13 innerhalb der Epsilon-Umgebung

7. Untersuchen Sie die Folge $(a_n) = \left(\frac{-n+1}{2n}\right)$ auf Monotonie und Beschränktheit.

Lösung: streng monoton fallend; g=-0,5; z. B. $S_u$= -1; $S_o$=1

8. Ein trapezförmiges Dach hat 38 Ziegelreihen, Die erste Reihe besteht aus 25 Ziegeln, jede weitere Reihe hat 3 Ziegeln mehr als die vorhergehende Reihe. Wieviel Ziegeln befinden sich auf dem Dach?

Rekursiv: $(a_1) = 25; \quad (a_{n+1}) = (a_n) + 3$

Explizit: $(a_n) = 25 + 3(n-1) = 22 + 3n$

$$S = \sum_{n=1}^{38}(a_n) = \sum_{n=1}^{38}(22+3n) = 22 \cdot 38 + 3\sum_{n=1}^{38} n = 22 \cdot 38 + 3 \cdot \frac{38 \cdot (38+1)}{2} = 3059$$

9. Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{20}\right)^{k-1}$ konvergiert!

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{20}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^3 + \ldots \qquad \text{Geom.Reihe mit } q = \frac{1}{20}$$

$$S = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{20}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{20}} = \frac{1-0}{\frac{19}{20}} = \frac{20}{19}$$

10. Unter Annahme einer geometrischen Reihe ist $2 + 6 + 18 + \ldots + 13122$ mit q=3

$$S=2(1+3+9+\ldots+6561)=2\left(1+3^1+3^2+\ldots+3^8\right) = 2\frac{1-3^9}{1-3} = 3^9 - 1 = 19682$$